2. Fels M. E. *The equivalence problem for systems of second-order ordinary differential equations* // Proc. London Math. Soc. – 1995. – V. 71. – P. 221-240.

Ю. Ю. Багдерина, А. У. Сакиева

Институт математики с ВЦ УНЦ РАН,

yulya@mail.rb.ru

ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ ДИСКРЕТНО-НЕПРЕРЫВНЫХ ЦЕПОЧЕК, ИНТЕГРИРУЕМЫХ ПО ДАРБУ

В работе рассматриваются полудискретные цепочки вида

$$\frac{d}{dx}u(n+1,x) = \frac{d}{dx}u(n,x) + f(u(n,x),u(n+1,x)), \quad n \in Z. \quad (1)$$

Используются обозначения $u_n = u(n,x)$, $u_{n+k} = u(n+k,x)$, D — оператор сдвига по n, т. е. $Dh(n,x) = h(n+1,x)$, и D_x — оператор полной производной по x, т. е. $D_x h(n,x) = (d/dx)h(n,x)$. Пусть функции I и F зависят от x и конечного числа переменных u_n, $u_{n+1}, \dots, u_{n+k}$ и их производных по x.

Определение. *Функция I называется n-интегралом цепочки* (1), *если $DI = I$. Функция F называется x-интегралом цепочки* (1), *если $D_x F = 0$.*

Можно показать, что n-интеграл I является функцией переменных x, u_n и производных функции u_n по x, а x-интеграл F не зависит от производных по x переменных u_n, $u_{n+1}, \dots, u_{n+k}$.

Определение. *Цепочку (1) называют интегрируемой по Дарбу, если она имеет нетривиальные n-интеграл и x-интеграл.*

Справедливо следующее утверждение [1].

Теорема. *Цепочка (1) допускает нетривиальные x- и n-интегралы тогда и только тогда, когда $f(u_n, u_{n+1})$ имеет вид одной из следующих четырех функций:*

(I) $f(u_n, u_{u+1}) = A(u_{n+1} - u_n)$, где A задается неявно в виде

$$A(u_{n+1} - u_n) = (d/d\theta)P(\theta), \qquad u_{n+1} - u_n = P(\theta),$$

с $P(\theta)$, являющейся произвольной функцией, удовлетворяющей обыкновенному дифференциальному уравнению (ОДУ)

$$P^{(N+1)} = \mu_N P^{(N)} + \cdots + \mu_1 P' + \mu_0 P$$

с постоянными коэффициентами μ_k, $k = 0, \ldots, N$;

(II) $f(u_n, u_{u+1}) = C_1(u_{n+1}^2 - u_n^2) + C_2(u_{n+1} - u_n)$;

(III) $f(u_n, u_{u+1}) = C_5(\mathrm{e}^{\alpha u_{n+1}} - \mathrm{e}^{\alpha u_n}) + C_6(\mathrm{e}^{-\alpha u_{n+1}} - \mathrm{e}^{-\alpha u_n})$;

(IV) $f(u_n, u_{u+1}) = \sqrt{C_3\mathrm{e}^{2\alpha u_{n+1}} + C_4\mathrm{e}^{\alpha(u_{n+1}+u_n)} + C_3\mathrm{e}^{2\alpha u_n}}$,

где $\alpha \neq 0$, $C_1, \ldots, C_6$ — произвольные постоянные.

Соответствующие нетривиальные n-интегралы I равны:

(I) $I = L(D_x)u_{n,x}$, где $L(D_x)$ — дифференциальный оператор, обращающий в нуль выражение $(d/dx)P(\theta)$, где $D_x\theta = 1$;

(II) $I = u_{n,x} - C_1u_n^2 - C_2u_n$;

(III) $I = u_{n,x} - C_5\mathrm{e}^{\alpha u_n} - C_6\mathrm{e}^{-\alpha u_n}$;

(IV) $I = 2u_{n,xx} - \alpha u_{n,x}^2 - \alpha C_3\mathrm{e}^{2\alpha u_n}$.

В данной работе построено общее решение цепочки (1) в перечисленных выше интегрируемых случаях. Для этого необходимо проинтегрировать ОДУ

$$I(x, u_n, u_{n,x}, u_{n,xx}, u_{n,xxx}, \ldots) = \phi(x) \qquad (2)$$

относительно функции u_n, где $\phi(x)$ — произвольная функция x, не зависящая от n, а затем общее решение ОДУ (2)

$$u_n = U(x, A_n, B_n, C_n, \ldots)$$

подставить в цепочку (1) и найти возможную связь между постоянными A_n, B_n, $C_n, \ldots$. Общее решение цепочки (1) должно зависеть от одной произвольной функции переменной x и одного бесконечного набора произвольных постоянных, например, A_n, $n \in Z$.

(I) Построение общего решения цепочки (1) в случае (I) не представляет сложности и здесь не рассматривается, т. к. в этом случае ОДУ (2) является линейным.

(II) В этом случае ОДУ (2) имеет вид уравнения Риккати

$$u_{n,x} = C_1 u_n^2 + C_2 u_n + \phi(x),$$

для которого нетрудно найти общее решение

$$u_n = \frac{1}{C_1}\left(\frac{\psi''}{2\psi'} - \frac{\psi'}{\psi + A_n} - \frac{C_2}{2}\right).$$

Здесь и в дальнейшем $\psi(x)$ — произвольная функция x, а A_n, $n \in Z$, — произвольные постоянные. Подстановка этого решения в цепочку (1) с соответствующей функцией $f(u_n, u_{n+1})$ приводит к тождеству.

(III) ОДУ (2), как и в предыдущем случае, является уравнением Риккати. Его общее решение (так же как, и общее решение цепочки (1)) имеет вид

$$u_n = \frac{1}{\alpha}\ln\left(\Phi(x) - \frac{\psi'}{\psi + A_n}\right) - \frac{1}{\alpha}\ln(\alpha C_5),$$

где $\Phi(x)$ — любое частное решение уравнения Риккати

$$\Phi' = \alpha^2 C_5 C_6 + \frac{\psi''}{\psi'}\Phi - \Phi^2.$$

(IV) ОДУ (2) имеет вид

$$2u_{n,xx} = \alpha u_{n,x}^2 + \alpha C_3 \mathrm{e}^{2\alpha u_n} + \phi(x) \tag{3}$$

и принадлежит третьему типу уравнений второго порядка, изучавшихся в [2]. Его инварианты $J_1 = 6/5$, $J_2 = 0$ совпадают с инвариантами ОДУ

$$y_{tt} = \frac{y_t^2 - 1}{2y}, \tag{4}$$

и, следовательно, эти два уравнения эквивалентны. Действительно, если предположить, что в (3) функция $\phi(x)$ представима в виде

$$\phi = \frac{1}{\alpha}\left(2\frac{\psi'''}{\psi'} - 3\frac{\psi''^2}{\psi'^2}\right)$$

с некоторой функцией $\psi(x)$, то уравнения (3), (4) связаны преобразованием

$$t = \psi(x), \qquad y = \frac{\psi'(x)}{\alpha\sqrt{C_3}}\mathrm{e}^{-\alpha u_n}.$$

Тогда, зная общее решение уравнения (4)

$$y = \frac{(t+A)(t+B)}{B-A}, \qquad A, B = \mathrm{const},$$

нетрудно найти общее решение ОДУ (3)

$$u_n = \frac{1}{\alpha}\ln\left(\frac{(B_n - A_n)\psi'}{\alpha\sqrt{C_3}(\psi + A_n)(\psi + B_n)}\right). \tag{5}$$

Его подстановка в цепочку (1) приводит к соотношению

$$(2C_3 - C_4)(A_n - B_n)(A_{n+1} - B_{n+1}) = \\ = 4C_3(A_n - B_{n+1})(A_{n+1} - B_n), \tag{6}$$

определяющему связь постоянных B_n, $n \in Z$, с произвольными постоянными A_n, $n \in Z$, в общем решении (5) цепочки (1).

Если $C_4 = 2C_3$, то из (6) следует, что $B_n = A_{n+1}$, $n \in Z$. В этом случае сравним решение (5) цепочки (1) с общим решением

$$v_n = \frac{\psi'}{\psi + A_n} - \frac{\psi'}{\psi + A_{n+1}}$$

дискретного аналога уравнения Лиувилля [3]

$$v_n v_{n+1,x} - v_{n+1} v_{n,x} = v_n v_{n+1}(v_n + v_{n+1}). \tag{7}$$

Нетрудно видеть, что при $C_4 = 2C_3$ цепочки (1), (7) (как и их общие решения) связаны подстановкой $v_n = \alpha\sqrt{C_3}e^{\alpha u_n}$.

Работа выполнена при финансовой поддержке грантов МК-8247.2010.1, РФФИ (проект 10-01-00186-а), ФЦП "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России" на 2009 – 2013 годы (госконтракт 02.740.11.0612) и гранта № 3 Республики Башкортостан для молодых ученых и молодежных научных коллективов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Habibullin I., Zheltukhina N., Pekcan A. *Complete list of Darboux integrable chains* // J. Math. Phys. – 2009. – V. 50. – P. 102710.

2. Багдерина Ю. Ю. *Эквивалентность обыкновенных дифференциальных уравнений* $y'' = R(x,y)y'^2 + 2Q(x,y)y' + P(x,y)$ // Дифференц. уравнения. – 2007. – Т. 43. – № 5. – С. 581-589.

3. Адлер В. Э., Старцев С. Я. *О дискретных аналогах уравнения Лиувилля* // ТМФ. – 1999. – Т. 121. – № 2. – С. 271-284.

Т. Е. Бадокина

Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарева, bad_zip1@mail.ru

ДИВЕРГЕНЦИЯ УПРУГО ОПЕРТОЙ УДЛИНЕННОЙ ПЛАСТИНЫ В СВЕРХЗВУКОВОМ ПОТОКЕ ГАЗА

Методами [1] исследуется задача о прогибах тонкой гибкой удлиненной пластины ширины d на упругом основании в сверхзвуковом потоке газа. Рассматриваются стационарные решения системы малых прогибов крыла, т. е. задача о дивергенции тонкого крыла ширины d, и два вида граничных условий:

B) левый край свободен, правый жестко закреплен:
$w''_{x^2}(0) = w'''_{x^3}(0) = 0, \quad w(1) = w'_x(1) = 0;$

B$'$) левый край жестко закреплен, правый — свободен:
$w(0) = w'_x(0) = 0 \quad w''_{x^2}(1) = w'''_{x^3}(1) = 0.$